

Шәкір Айдос



Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

7-дәріс. Интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп. Шешімнің асимптотикалық қасиеті

Дәрістің мақсаты – интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің әлсіз шешімінің асимптотикалық қасиеттерін зерттеу

Негізгі сұрақтар:

1. Сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің $K(t) \neq 0$ жағдайда экспоненциалды кемуі
2. Сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің $K(t) = 0$ жағдайда экспоненциалды кемуі

1 Есептің қойылымы

Бұл дәрісте сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың қозғалысын сипаттайтын сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін коэффициентті кері есеп қарастырылды. Аталмыш кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі қасиеті зерттелінді. Қарастырылып отырған кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі туралы интегралдық мүше болғанда ($K(t) \neq 0$) 1.2-теорема, болмағанда ($K(t) = 0$) 1.1-теорема алынды. Теоремалар математикалық қатаң тілде дәлелденді. Алынған нәтижелер жоба орындаушыларының [1] жұмысында жарияланған.

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, шектелген облыс, ал $\partial\Omega$ оның тегіс шекарасы болсын. Сондай-ақ, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ арқылы цилиндрлік облысты, ал оның $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ арқылы бүйір бетін белгілейік, мұндағы T — берілген оң ақырлы уақыт. Біз $(\mathbf{u}(x, t), p(x, t), f(t))$ функцияларын анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын from the system of equations

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = f(t) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad \text{in } Q_T, \quad (1.1)$$

жады мүшесі бар Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{in } Q_T, \quad (1.2)$$

сығылмайтын сұйық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.3)$$

бастапқы шартты,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_T, \quad (1.4)$$

шекаралық шартты және

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = h(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.5)$$

қосымша интегралдық шартын қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ сұйықтықтың жылдамдығының өрісі, $p(\mathbf{x}, t)$ сұйықтықтың қысымы, ал ν және $\kappa > 0$ сандары, сәйкесінше, сұйықтықтың кинематикалық тұтқырлығы мен релаксация коэффициенттері болып табылады. Сондай-ақ, кері есепте $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := f(t)\sigma(\mathbf{x})$ сыртқы күштердің әсерін сипаттайды, мұндағы $\sigma(x) := \omega(\mathbf{x}) - \kappa \Delta \omega(\mathbf{x})$ және ондағы $f(t)$ интенсивтілігі белгісіз функция, ал $\mathbf{u}_0(x)$, $h(t)$, $\omega(\mathbf{x})$ және $K(t)$ функциялары берілген белгілілер.

Анықтама 1.1. (1.1)-(1.5) кері есебінің әлсіз шешімі деп

1. $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^1) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1)$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1)$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
2. Ω облысында $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ бастапқы шартты;
3. барлық $t \in [0, T]$ аралығында (1.5) қосымша шартты;
4. кез келген $\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ тест функциясы және барлық $t \in (0, T)$ мәндері үшін төмендегі интегралдық тепе-теңдікті

$$\frac{d}{dt} \left((\mathbf{u}, \varphi)_{2, \Omega} + \kappa \mathbf{a}(\mathbf{u}, \varphi) \right) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \varphi) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi, \mathbf{u} + \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}, \varphi) ds = f(t) (\omega, \varphi)_{2, \Omega}, \quad (1.6)$$

қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функцияларын жұбын айтады, мұндағы $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \varphi) := (\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi)_{2, \Omega}$.

Айталық, (1.1)-(1.5) кері есебінің бастапқы берілгенді келесі шарттарды қанағаттандырсын

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1; \quad (1.7)$$

$$\omega(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1, \quad h(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (1.8)$$

Енді келесі энергетикалық функцияны енгізейік

$$\Psi(t) := \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2.$$

Теорема 1.1 ($K(t) \neq 0$ жағдай). Айталық, (1.7), (1.8) шарттар орындалсын және m_0, α оң сандары табылып келесі шарттарды қанағаттандырсын

$$|K(t)| \leq m_0 e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

және

$$\|K\|_{L_1[0,t]} = \int_0^t |K(\tau)| d\tau \leq \frac{m_0}{\alpha}, \quad \text{and} \quad \|K\|_{L_2[0,t]} = \left(\int_0^t |K(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{m_0}{\sqrt{2\alpha}}. \quad (15)$$

Онда $0 < \gamma < \alpha$ мәніне сәйкес M_2 ақырлы оң саны табылып

$$\Psi(t) \leq M_2 e^{-\gamma t},$$

бағалау орындалады, яғни $\Psi(t)$ функциясы $t \rightarrow \infty$ кезде экспоненциалды кемиді.

Дәлелдеуі 1.1. Ең алдымен $K(t) \neq 0$ жағдайда, (1)–(5) есебінің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемюін көрсетейік. Олай болса, (1) өрнекті $\mathbf{v}$ функциясына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдап және бөліктеп интегралдау өрнегінің көмегімен

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2) + \nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 = \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{v}(s), \nabla \mathbf{v}(t))_{2,\Omega} ds + S_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}_t) = \sum_{i=1}^2 J_i \quad (1.9)$$

энергетикалық теңдігін алуға болады, мұндағы

$$S_1(\mathbf{v}, t) := \frac{1}{k_0} \left(h'(t) + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right); \quad k_0 := \|\boldsymbol{\omega}\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla \boldsymbol{\omega}\|_{2,\Omega}^2$$

Енді (1.9) өрнектің оң жағын бағалайық

$$|J_1| \leq \frac{\varepsilon_0 \nu}{4} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{\varepsilon_0 \nu} \left(\int_0^t |K(t-s)| \|\mathbf{v}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \right)^2 \quad (1.10)$$

және

$$|J_2| \leq \frac{|h(t)| |h'(t)|}{k_0} + \frac{\varepsilon_0 \nu}{4} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\nu}{\varepsilon_0 k_0^2} |h(t)|^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1 k_0^2} |h(t)|^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \left(\int_0^t |K(t-s)| \|\mathbf{v}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \right)^2 \quad (1.11)$$

Соңғы (1.10), (1.11) бағалауларды (1.9) өрнекке қойсақ, онда

$$\frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2) + 2(\nu - \varepsilon_0) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \left(\frac{2}{\varepsilon_0 \nu} + \varepsilon_1 \right) \left(\int_0^t |K(t-s)| \|\mathbf{v}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \right)^2 + C_1(t) \quad (1.12)$$

мұндағы

$$C_1(t) := \frac{|h(t)||h'(t)|}{k_0} + \frac{\nu}{\varepsilon_0 k_0^2} |h(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1 k_0^2} |h(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{H}}^2.$$

Соңғы өрнекті s бойынша 0-ден t -ке дейін интегралдағанда,

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + 2(\nu - \varepsilon_0) \int_0^t \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 ds \leq \left(\frac{2}{\varepsilon_0 \nu} + \varepsilon_1 \right) \int_0^t \left(\int_0^s |K(s-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}} d\tau \right)^2 ds + C_2 \quad (1.13)$$

мұндағы $C_2 = \int_0^t C_1(s) ds + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}}^2$. Сонымен қатар, (1.12) өрнектегі интегралдық мүше үшін

$$\left(\int_0^t |K(t-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}} d\tau \right)^2 \leq \int_0^t |K(t-\tau)| d\tau \int_0^t |K(t-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau = \|K\|_{L^1([0,T])} \int_0^t |K(t-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau \quad (1.14)$$

бағалауын қолдануға болады. Сондай-ақ, m_0, α оң сандары табылып, $|K(t)| \leq m_0 e^{-\alpha t}, t \in R^+$ болса, онда төмендегі бағалауды алуға болады

$$y_1(t) = \|K\|_{L^1([0,T])} = \int_0^t |K(\tau)| d\tau \leq \frac{m_0}{\alpha}, \quad y_2(t) = \|K\|_{L^2([0,T])} = \left(\int_0^t |K(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \frac{m_0}{\sqrt{2\alpha}}. \quad (1.15)$$

Жоғарыдағы (1.15) өрнектің көмегімен келесі теңсіздік тұжырымдалады:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s |K(s-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau ds &\leq \int_0^t \int_0^t |K(s-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau ds = \\ &\int_0^t \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 \int_0^t |K(s-\tau)| ds d\tau \leq \|K\|_{L^1([0,T])} \int_0^t \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Осылайша (1.14)–(1.16) өрнектерді (1.13) өрнекке ескерсек, онда бағалау алынады

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + C_0 \int_0^t \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 ds \leq M_1 \quad (1.17)$$

мұндағы $C_0 := 2(\nu - \varepsilon_0) - \left(\frac{2}{\varepsilon_0 \nu} + \varepsilon_1 \right) \left(\frac{m_0}{\alpha} \right)^2 > 0$ және M_1 есептің берілгендерінен тәуелді оң сан.

Енді $0 < \gamma < \alpha$ саны үшін $\mathbf{v}(t) = e^{-\gamma t} \mathbf{u}(t)$ деп алсақ, және $\mathbf{v}_t = \mathbf{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \mathbf{u} e^{-\gamma t}$ екенін ескерсек, онда (1.1) өрнек мына түрде жазылады:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \mathbf{u} e^{-\gamma t} - \Delta (\mathbf{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \mathbf{u} e^{-\gamma t}) - \nu \Delta \mathbf{u} e^{\gamma t} - \int_0^t K(t-s) \mathbf{u} e^{-\gamma s} ds = \\ \frac{\sigma(\mathbf{x})}{k_0} \left[h'(t) + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} e^{-\gamma t} \nabla \omega dx + \int_0^t K(t-s) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} e^{-\gamma s} \nabla \omega dx ds \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Соңғы өрнектің екі жағына $e^{\gamma t}$ көбейтсек, онда келесі өрнек тұжырымдалады

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \gamma \mathbf{u} - \Delta (\mathbf{u}_t - \gamma \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \mathbf{u} e^{\gamma(t-s)} ds = \\ \frac{\sigma(\mathbf{x})}{k_0} \left[h'(t) e^{\gamma t} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \omega dx + \int_0^t K(t-s) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} e^{\gamma(t-s)} \nabla \omega dx ds \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Мұнан соң жоғарыдағы өрнекті $\mathbf{u}$ функциясына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдап, бөліктеп интегралдасақ, онда келесі теңдік шығады

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2) - \gamma \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 - \gamma \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2 + \nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2 = \int_0^t K_\gamma(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} ds + \\ \frac{h(t)}{k_0} \left(h'(t) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K_\gamma(t-s) (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

мұндағы $K_\gamma(t) := K(t)e^{\gamma t}$. Егер $\gamma < \alpha$ жағдайда төмендегі бағалауларды алуға болады

$$\begin{aligned} \|K_\gamma(t)\|_{L^1([0,T])} &= \int_0^t K(s)e^{\gamma s} ds \leq m \int_0^t e^{-(\alpha-\gamma)s} ds \leq \frac{m}{\alpha-\gamma}; \\ \|K_\gamma(t)\|_{L^2([0,T])} &= \left(\int_0^t |K(s)e^{\gamma s}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{m}{\sqrt{2(\alpha-\gamma)}} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Сонымен қатар, Фридрихс теңсіздігінен

$$-\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 \geq -C\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2 \quad (1.22)$$

теңсіздігін қорытуға болады. Соңғы бағалаудан

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2) + (\nu - \gamma - \gamma C) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \int_0^t K_\gamma(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} ds + \\ \frac{h(t)}{k_0} \left(h'(t) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K_\gamma(t-s) (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Осылайша (1.10), (1.21), (1.22), (1.23) өрнектерден келесі нәтижені алуға болады

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq M_2, \quad (1.24)$$

мұндағы M_2 есептің берілгендерінен тәуелді оң сан және $\mathbf{v} = \mathbf{u}e^{-\gamma t}$ өрнегін ескеріп төмендегі нәтижені тұжырымдауға болады

$$\Psi(t) = |\psi(t)|_{L^2} \leq M_2 e^{-\gamma t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.25)$$

Теорема 1.2 ($K(t) = 0$ жағдай). Айталық, $e(t)$ және $e'(t)$ функциялары уақыт бойынша монотонды кемімелі функциялар болсын және

$$A \int_0^t (|e(s)|^2 + |e'(s)|^2) e^{\lambda s} ds + \Psi(0) < +\infty, \quad (1.26)$$

шарты орындасын, мұндағы

$$A := \frac{(\varkappa + \nu) \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + 3l_0}{2l_0^2} \quad \text{және} \quad \Psi(0) := \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^1}^2,$$

$$\lambda := \frac{\nu}{C(\Omega) + \varkappa + \nu}.$$

Онда M_1 ақырлы оң саны табылып

$$\Psi(t) \leq M_1 e^{-\lambda t},$$

бағалау орындалады, яғни $\Psi(t)$ функциясы $t \rightarrow \infty$ кезде экспоненциалды кемиді.

Дәлелдеуі 1.2. Енді (1.1)-(1.4) кері есебінің әлсіз шешімінің $K(t) = 0$ және $\sigma(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})$ болғанда экспоненциалды кемуін зерттейік. (1.1) теңдеулер жүйесін $\mathbf{v}$ және $\mathbf{v}_t$ функцияларына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдайық. Мұнан кейін, бөліктеп интегралдау өрнегін қолданып, келесі энергетикалық теңдіктер шығады

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2) + \nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 = S_2(\mathbf{v}, t) h(t) \quad (1.27)$$

$$\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{H}}^2 = S_2(\mathbf{v}, t) h'(t) \quad (1.28)$$

мұндағы

$$S_2(\mathbf{v}, t) := \frac{1}{l_0} \left(h'(t) + (\nabla \mathbf{v}_t, \nabla \omega)_{2, \Omega} + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \omega)_{2, \Omega} \right); \quad l_0 := \|\omega\|_{2, \Omega}^2.$$

Осылайша (1.27) және (1.28) өрнектерден келесі теңдікті тұжырымдауға болады

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2) + \nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{H}}^2 = S_2(\mathbf{v}, t) h(t) + S_2(\mathbf{v}, t) h'(t) \quad (1.29)$$

Соңғы өрнектің оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

$$|S_2(\mathbf{v}, t) h(t)| \leq \frac{|h(t)|^2 + |h'(t)|^2}{2l_0^2} + \frac{1}{4} \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1 + \nu}{l_0^2} |h(t)|^2 \|\omega(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\nu}{4} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2, \quad (1.30)$$

$$|S_2(\mathbf{v}, t) h'(t)| \leq \frac{|h'(t)|^2}{l_0} + \frac{1}{4} \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1 + \nu}{l_0^2} |h'(t)|^2 \|\omega(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\nu}{4} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \quad (1.31)$$

Мұнан кейін (1.30) және (1.31) бағалауларды (1.29) теңдіктің оң жағына қойғанда

$$\Psi'(t) + \nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{H}}^2 \leq A (|h(t)|^2 + |h'(t)|^2) \quad (1.32)$$

теңсіздігі тұжырымдалады, мұндағы

$$A := \frac{(\varkappa + \nu) \|\omega\|_{\mathbf{H}_1}^2 + 3l_0}{2l_0^2}.$$

Пуанкаре теңсіздігін пайдаланып келесі бағалауды да алуға болады

$$\nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \geq \frac{\nu}{C(\Omega) + \nu + \varkappa} (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2) = \mu \Psi(t), \quad (1.33)$$

мұндағы

$$\mu := \frac{\nu}{C(\Omega) + \nu + \varkappa} \quad (1.34)$$

Енді (1.34) бағалауды (1.33) теңсіздікке ескерсек әрі алынған нәтижені $e^{\mu t}$ —ға көбейтсек, онда

$$e^{\mu t}\Psi'(t) + \mu e^{\mu t}\Psi(t) \leq A (|h(t)|^2 + |h'(t)|^2) e^{\mu t}. \quad (1.35)$$

Соңғы өрнекті s айнымалысы бойынша 0—ден t —ға дейін интегралдағанда, келесі өрнек қорытылады

$$\Psi(t) \leq e^{-\mu t} \left(A \int_0^t (|h(s)|^2 + |h'(s)|^2) e^{\mu s} ds + \Psi(0) \right). \quad (1.36)$$

Онда (1.36) теңсіздікте t шексіздікке ұмтылғанда ($t \rightarrow \infty$) $\Psi(t)$ функциясы 0—ге ұмтылады ($\Psi(t) \rightarrow 0$).

Список литературы

- [1] Абылкаиров У., Кенжебай Х., Шәкір А. Жады мүшесі бар Кельфин-Фойгт жүйесінің шешімінің экспоненциалды кемуі. Абай атындағы ҚазҰПУ Хабаршысы. Физика-математика ғылымдары сериясы. 90, 2 (2025), 36–45. DOI: <https://doi.org/10.51889/2959-5894.2025.90.2.003> 1